Digitale Bibliothek Braunschweig

Festvortrag zum 30. April 1958

Schmeidler, Werner

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 10, 1958,
S.47-53

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046998

Digitale Bibliothek Braunschweig

Festvortrag zum 30. April 1958

Von W. Schmeidler

Durch die Verleihung der Gauss-Medaille 1958 vor diesem erlauchten Kreise ist mir eine ganz ungewöhnliche Ehrung zuteil geworden, für die ich hiermit meinen wärmsten und tiefstgefühlten Dank aussprechen darf, vor allem dem Präsidenten der Gesellschaft, Herrn Prof. Dr. *M. Kohler*. Ich danke insbesondere auch Herrn Professor *Kroepelin* aufs herzlichste für seine warmherzige und großzügige Würdigung der Bedeutung meines Faches im Rahmen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft.

Der Name *Gauß* erweckt in jedem Mathematiker Gefühle der Ehrfurcht und Dankbarkeit für das von diesem großen Manne für unsere Wissenschaft Geleistete. Es sind vor allem dreierlei Tugenden, die er in unübertroffener Weise ausgeübt hat: Unbedingte Zuverlässigkeit und Sicherheit, auch in den kleinsten Einzelheiten, geniale Schau für das mathematisch Wesentliche in Theorie und Anwendungen und eine wahrhaft umfassende Auffassung der Mathematik und ihrer zentralen Stellung innerhalb der gesamten Naturwissenschaft. Auf allen drei Gebieten kann er uns Heutigen noch immer zum Vorbild dienen. Kaum einer von uns kann sich rühmen, wie er niemals in der Wissenschaft einen Fehler gemacht zu haben (ich jedenfalls bin weit davon entfernt, das von mir behaupten zu können). Wenige nur haben sich angesichts der unaufhörlichen Erweiterung unseres mathematischen Gesichtskreises eine wahrhaft umfassende Schau des mathematisch Wesentlichen bewahren können, und erst in jüngster Zeit ist das Verständnis für die lebenswichtige Verbindung von Mathematik und ihren Anwendungen im allgemeinen Bewußtsein der Mathematiker wieder im Wachsen begriffen, nachdem eine jahrzehntelange Abschnürung der reinen von der angewandten Mathematik den Lebensstrom zwischen beiden zum Stocken gebracht hatte. Daher ist es für jeden heutigen Mathematiker hohe Ehre und gleichzeitig wirksamster Ansporn, seinen eigenen bescheidenen Namen mit dem des großen *Gauß* in Verbindung gebracht zu sehen.

Wenn ich nun den heutigen Festvortrag zu halten die Ehre habe, so darf ich den Versuch unternehmen, über das neueste Arbeitsgebiet zu berichten, das mir entgegentrat, als es sich um die Weiterführung meines Werkes über lineare Integralgleichungen in das Gebiet der nichtlinearen Integralgleichungen handelte. Dieses letztere sehr umfassende Gebiet ist seit längerer Zeit von ausgezeichneten Forschern bearbeitet worden, ich nenne nur die Namen *Erhard Schmidt*, *Lichtenstein*, *Hammerstein*, *Iglisch*, *Carleman*, *Leray* u. a.; es sind andererseits auch die Methoden der Topologie mit Hilfe der Fixpunktsätze von *Brouwer*, *Schauder* u. a. mit Erfolg zur Behandlung nichtlinearer Integralgleichungen herangezogen worden. Bei allen diesen Arbeiten handelt es sich um mehr oder weniger allgemeine Sätze, die andererseits eine vollständige Übersicht über irgendeine einigermaßen umfassende Klasse solcher Integral-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046998

Digitale Bibliothek Braunschweig

gleichungen, die über das lineare Gebiet hinausgehen, noch nicht zu geben gestatten. Es ist daher vielleicht von Interesse, auf ein solches Gebiet das Augenmerk zu richten, bei dem eine gewisse Aussicht besteht, zu einer vollständigeren Übersicht zu gelangen als bisher; ich meine das Gebiet der **algebraischen Integralgleichungen.**

Ich verstehe darunter eine Integralgleichung der Form:

$$P(y;y) = \sum_{0 \leqq \alpha + \alpha_1 + \ldots \alpha_\nu \leqq n} \overset{\alpha}{y}(s) \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_{\alpha \alpha_1 \ldots \alpha_\nu}(s\, t_1 \ldots t_\nu)\, \overset{\alpha_1}{y}(t_1) \ldots \overset{\alpha_\nu}{y}(t_\nu)\, dt_1 \ldots dt_\nu = 0$$

Nachdem *Erhard Schmidt* schon vor Jahrzehnten den Begriff der **Integralpotenzreihe** geprägt und in der Forschung heimisch gemacht hatte, war es eigentlich sehr naheliegend, die **endlichen** Summen dieser Art, die wir als **Integralpolynome** bezeichnen wollen, zu betrachten. Da es sich dabei in gewissem Sinne um die einfachste Verallgemeinerung der linearen Integralausdrücke handelt, so ist kein Zweifel, daß, wenn einmal erst die Theorie dieser Gleichungen einigermaßen ausgebaut sein wird, auch die Anwendungen in größerem Umfange als es bisher der Fall ist, Beispiele dieser Art liefern werden.

Bisher ist eine ziemlich allgemein verbreitete Scheu festzustellen, nichtlineare Probleme der Anwendungen, die meist in Form von Randwertaufgaben von Differentialgleichungen auftreten, in Form von Integralgleichungen überhaupt zu formulieren, weil angesichts des theoretischen Vakuums niemand glauben mag, daß etwas dadurch gewonnen wird. Das war ja auch im linearen Falle nicht anders. Ein einziges Beispiel dieser Art will ich erwähnen, aus dem hervorgeht, daß die Umformung dennoch von Nutzen sein kann.

Die Wirkung des magnetischen Eigenfeldes (*Pinch*-Effekt) bei einer Gasentladung wird nach *Tonks* beschrieben durch eine Differentialgleichung der Form

$$f \frac{d^2 J}{df^2} + J\left(1 + L \frac{dJ}{df}\right) = 0,$$

wobei f ein dimensionsloses Maß des kreisförmigen Querschnitts $(0 \leqq f \leqq fo)$ und $J(f) \geqq 0$ den durch f fließenden Strom bedeutet, während L den für das magnetische Eigenfeld maßgebenden Koeffizienten bedeutet. Am Rande ist $\frac{dJ}{df} = 0$. Nach den praktischen Beobachtungen ergibt sich für $LJ(fo) < 2$ eine bestimmte Stromverteilung über den Querschnitt, während bei $LJ(fo) = 0$ Unterbrechung des Stromes durch Selbstabschnürung erfolgt. Während die Differentialgleichung diesen Effekt nicht ohne weiteres exakt mathematisch zu berechnen erlaubt, gestattet dies die Umformung in eine Integralgleichung, die in der Form

$$y(s) = \frac{J_1(2s)}{s} - L \int_0^s t^3 \overset{2}{y}(t) \cdot \frac{J_2(2s)\, N_1(2t) - N_2(2t)\, J_1(2s)}{s}\, dt \quad (J[fo] = s^2\, y[s])$$

(J_1, J_2, N_1, N_2 Besselsche bzw. Neumannsche Funktion).

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046998

Digitale Bibliothek Braunschweig

einer *Volterra*schen algebraischen Integralgleichung formuliert werden kann. Die Theorie dieser Integralgleichung ergibt das Vorhandensein eines positiven Stromes für $L\,J\,(f_0) < 2$, nicht dagegen für $L\,J\,(f_0) = 2$.

Einige weitere solcher Beispiele sind auch heute schon in der Literatur bekannt.

Natürlich wird man angesichts der gestellten allgemeinen Aufgabe eine Theorie anstreben, die möglich vollständige Auskunft gibt über die Gesamtheit aller in einem konkreten Fall vorhandenen komplexen Lösungsfunktionen $y\,(s)$. An Beispielen kann man sich nun aber davon überzeugen, daß auch bei stetigen Koeffizientenfunktionen $\underset{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}{K}(s t_1 \ldots t_\nu)$ unter Umständen unstetige Lösungen existieren können, und zwar dann, wenn die algebraische Gleichung $P\,(z;\,y) = 0$ für $z\,(s)$ mehrfache Nullstellen besitzt. Interessiert man sich also in erster Linie für stetige Lösungen, so wird man danach trachten, durch geeignete Voraussetzungen ein solches Vorkommnis auszuschließen. Ebenso ist klar, daß von besonderem Interesse die reellen Lösungen $y\,(s)$ sein werden, schon im Interesse der Anwendungen. Aus diesen Gründen erscheint es zweckmäßig, den Begriff der algebraischen Integralgleichung nicht von vornherein in voller Allgemeinheit zu untersuchen, sondern gewisse zusätzliche Voraussetzungen dabei — wenigstens vorläufig — mit hinzunehmen. Es fragt sich ferner, welche Teile der linearen Theorie wir in erster Linie zu verallgemeinern versuchen wollen. Bekanntlich sind es vor allem zwei große Klassen von Fragestellungen, die im linearen Falle zu unterscheiden sind, einmal die *Fredholm*sche Theorie der homogenen und unhomogenen Integralgleichungen, sodann die speziellere Theorie der homogenen Integralgleichungen, vor allem die Eigenwerttheorie der symmetrischen Kerne. Beginnen wir mit der letzteren.

Treten in unserer Integralgleichung nur Glieder vom Gesamtgrad n auf, so heißt sie **homogen**. In Verallgemeinerung des linearen Falles setzen wir dann

$$P\,(z;\,y) = \overset{n}{z}(s) - \sum_{\alpha=0}^{n-1} \overset{\alpha}{z}(s) \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu=n-\alpha} \int_0^1 \!\!\ldots\! \int_0^1 \underset{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}{K}(s\,t_1 \ldots t_\nu)\, \overset{\alpha_1}{y}(t_1) \ldots \overset{\alpha_\nu}{y}(t_\nu)\, dt_1 \ldots dt_\nu$$

und betrachten in Analogie zum linearen Falle die Gleichung

$$P\,(\mu\,y;\,y) = 0.$$

Es wird sich dann fragen, ob ein „Eigenwert μ" und eine von Null verschiedene Eigenfunktion $y\,(s)$ existiert. Bekanntlich ist auch für $n = 1$ diese Frage nicht allgemein zu bejahen, sondern vor allem dann, wenn in $\mu\,y\,(s) - \int_0^1 K(st)y(t)dt = 0$ der Kern $K\,(st) = K\,(ts)$ symmetrisch ist. **Wie ist nun dieser Begriff der symmetrischen linearen Integralgleichung ins Algebraische zu übertragen?**

Bei jeder Verallgemeinerung dieser Art kann man verschiedenartige Gesichtspunkte in den Vordergrund stellen. Für uns scheint mir das wichtigste zu sein, nicht nur den Begriff selbst zu verallgemeinern, sondern auch Sorge dafür zu tragen, daß die damit verknüpfte Theorie der symmetrischen Kerne einigermaßen übertragbar erscheint. Hier kommt uns nun zu Hilfe, daß der

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046998

Digitale Bibliothek Braunschweig

Begriff des Eigenwerts im linearen Falle eine begriffliche Formulierung zuläßt, die einer sinngemäßen Verallgemeinerung fähig ist. Bekanntlich ist der größte Eigenwert μ zugleich das Maximum der quadratischen Integralform

$$\int_0^1\int_0^1 K(s\,t)\,y(s)\,y(t)\,ds\,dt$$

unter der Nebenbedingung $\int_0^1 y^2(s)\,ds = 1$, und zwar führt das Problem der Bestimmung dieses Maximums dann bei einem beliebigen (nichtsymmetrischen) Kern zu der Integralgleichung

$$\mu\,y(s) - \frac{K(s\,t) + K(t\,s)}{2}\,y(t)\,dt = 0$$

als der „*Euler*schen Gleichung" des Variationsproblems. Dieser Gedankengang kann wie folgt verallgemeinert werden:

Statt der linearen Bestimmungsgleichung

$$\tau = \int_0^1\int_0^1 K(s\,t)\,y(s)y(t)\,ds\,dt$$

fassen wir eine Gleichung n-ten Grades

$$\tau^n - \sum_{\beta=0}^{n-1} \tau^\beta \sum_{(\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu = n+1)} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_{\beta\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(s\,t_1\ldots t_\nu)\,\overset{\alpha}{y}(s)\,\overset{\alpha_1}{y}(t_1)\ldots\overset{\alpha_\nu}{y}(t_\nu)\,ds\,dt_1\ldots dt_\nu = 0$$

ins Auge, die eine größte reelle Wurzel $\tau(y)$ besitzt, wählen also, um der Existenz dieser Wurzel sicher zu sein, n **als ungerade Zahl.** Wir fassen dann alle y mit $\int_0^1 \overset{n+1}{y}(s)\,\mathrm{ds} = 1$ ins Auge, und untersuchen bei dieser Normierung das Maximum τ_0 von τ. Der hierdurch bestimmte Wert $\mu = \tau_0$ liefert, wenn eine zugehörige Extremalfunktion y existiert, für diese wiederum eine „*Euler*sche Gleichung", die wir durch die Bedingung

$$\lim_{\varepsilon \uparrow 0} \frac{\tau(y+\varepsilon\eta) - \tau(y)}{\varepsilon} = 0$$

für jedes beliebige $\eta(s)$ bestimmen können. Die Berechnung dieses „*Fréchet*schen Differentials" ist hier vollständig durchführbar, da man die Bestimmungsgleichung für $\tau_0 = \mu$ auch in der Form

$$\int_0^1 \left\{ \overset{n+1}{y}(s)\cdot\overset{n}{\mu} - \sum_{\beta=0}^{n-1} \mu^\beta \sum_{\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu = n+1} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_{\beta\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(s\,t_1\ldots t_\nu)\,\overset{\alpha}{y}(s)\,\overset{\alpha_1}{y}(t_1)\ldots\overset{\alpha_\nu}{y}(t_\nu)\,dt_1\ldots dt_\nu \right\} ds = 0$$

schreiben kann. Das Integralpolynom linker Hand hat nun für die Extremalfunktion y ein Minimum, nämlich Null, weil für jedes andere y ein Wert $\geqq 0$ herauskommen muß. Wäre nämlich der Wert < 0, so existierte rechts von μ

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046998

Digitale Bibliothek Braunschweig

noch eine (größere) Nullstelle, was mit der Bestimmung von μ unverträglich ist. Wir erhalten daher für jedes $\eta\,(s)$:

$$\int_0^1 \eta(s) \Bigg\{ (n+1)\,\overset{n}{y}(s)\,\mu^n - \sum_{\beta=0}^{n-1} \mu^\beta \sum_{\alpha+\alpha_1+\dots+\alpha_\nu = n+1} \int_0^1 \dots \int_0^1 \Bigg[\underset{\beta\,\alpha\,\alpha_1\,..\,\alpha_\nu}{K}(s\,t_1 \dots t_\nu)\,\alpha\,\overset{\alpha-1}{y}(s)\,\overset{\alpha_1}{y}(t_1) \dots \overset{\alpha_\nu}{y}(t_\nu)$$

$$+ \underset{\beta\,\alpha\,\alpha_1\,\dots\,\alpha_\nu}{K}(t_1\,s \dots t_\nu)\,\alpha_1\,\overset{\alpha_1-1}{y}(s)\,\overset{\alpha}{y}(t_1) \dots \overset{\alpha_\nu}{y}(t_\nu)$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \underset{\beta\,\alpha\,\alpha_1\dots\alpha_\nu}{K}(t_\nu\,t_1 \dots s)\,\alpha_\nu\,\overset{\alpha_\nu-1}{y}(s)\,y(t_1) \dots \overset{\alpha}{y}(t_\nu) \Bigg] dt_1 \dots dt_\nu \Bigg\} ds = 0\,,$$

d. h. $\{\,\} = 0.$

Soll nun die obige Form als Polynom von $\mu\,y\,(s)$ erreicht werden, so muß $\alpha = \alpha_1 = \dots = \alpha_\nu = \beta + 1$ sein, also $(\nu+1)\,(\beta+1) = n+1$, und die Gleichung erhält die Form

$$(\mu\,y(s))^n - \sum_{\beta=0}^{n-1} (\mu\,y(s)^\beta \int_0^1 \dots \int_0^1 K_\beta\,(s\,t_1 \dots t_\nu)\,\overset{\beta+1}{y}(t_1) \dots \overset{\beta+1}{y}(t_\nu)\,dt_1 \dots dt_\nu = 0\,,$$

wobei alle Kernfunktionen symmetrisch in $s, t_1, \dots, t_\nu$ werden. Damit ist die Form einer symmetrischen algebraischen Integralgleichung festgestellt. Beispiel $n = 3$ liefert

$$\mu^3\,\overset{3}{y}(s) - \mu\,y(s) \int_0^1 K_1\,(s\,t)\,\overset{2}{y}(t)\,dt - \int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1 K_0\,(s\,t_1\,t_2\,t_3)\,y(t_1)\,y(t_2)\,y(t_3)\,dt_1 dt_2 dt_3 = 0\,,$$

wobei

$$\mu^3 - \mu \int_0^1\!\!\int_0^1 K_1(s\,t)\,\overset{2}{y}(s)\,\overset{2}{y}(t)\,ds\,dt -$$

$$- \int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1 K_0(s\,t_1\,t_2\,t_3)\,y(s)\,y(t_1)\,y(t_2)\,y(t_3)\,ds\,dt_1\,dt_2\,dt_3 = 0 \qquad \left(\int_0^1 \overset{4}{y}(s)\,ds = 1\right)$$

und μ die größte reelle Wurzel dieser Gleichung ist.

Die Existenz der Extremalfunktion selbst bedarf genauerer Überlegung, auf die wir aber heute nicht eingehen wollen.

Ähnlich kann nun nicht nur die Existenz des größten, sondern auch der **weiteren Eigenwerte** und Eigenfunktionen bewiesen werden, die sich als stetig erweisen, wenn man noch eine Diskriminantenvoraussetzung hinzufügt, die etwa für $n = 3$ durch die alleinige Forderung $K_1\,(st) < 0$ realisiert werden kann. Ein schwieriges Problem ist die sachgemäße Formulierung des **Ent-**

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046998

Digitale Bibliothek Braunschweig

wicklungssatzes, der aber auch in geeigneter Form übertragen werden kann. Ich hege die Hoffnung, daß diese Theorie sich in der Behandlung der nichtlinearen Schwingungen als nützlich erweisen möge.

Es sei noch bemerkt, daß der hier herangezogene Gedanke der Variationsrechnung sich auch in anderen Fällen zur Bestimmung der Lösungen algebraischer Integralgleichungen verwerten läßt. Zum Beispiel kann man unter gewissen Voraussetzungen feststellen, daß ein Integralpolynom für **alle** $y(s)$ ein Minimum hat, das dann für eine bestimmte Wahl von $y(s)$ erreicht wird. Dieses Variationsproblem ohne Nebenbedingungen hat eine ähnliche, aber in gewissem Sinne allgemeinere Form wie in der bekannten Theorie von *Hammerstein* und führt wie diese auf eine nichtlineare, im vorliegenden Falle algebraische Integralgleichung.

Der Gedankengang der **Übertragung der FREDHOLMschen Theorie** auf algebraische Integralgleichungen bezieht sich vor allem auf den Alternativsatz und beinhaltet in erster Linie die Aussage, daß entweder der homogene Bestandteil höchster Ordnung eine von Null verschiedene Lösung, oder die unhomogene Gleichung stets eine Lösung hat. Er ist aber bisher nur in gewissen Spezialfällen, noch nicht allgemein bewiesen worden.

Endlich sei noch bemerkt, daß auch die Methode des Fixpunktsatzes im Falle algebraischer Integralgleichungen verwendet werden kann und unter gewissen Voraussetzungen zu Iterationsfolgen zwecks Berechnung der Lösung führt.

Man erkennt aus der gegebenen Aufzählung, daß wir von einer Verwirklichung des angestrebten Zieles noch sehr weit entfernt sind, daß andererseits mancherlei Wege und Methoden in Frage kommen, die uns dem Ziele näherbringen können. Da nicht einmal lineare Integralgleichungen stets eine Lösung besitzen, kann man nicht erwarten, daß bei algebraischen einfache Verhältnisse vorliegen werden, zumal die mehrfachen Wurzeln der algebraischen Gleichung bestimmt erhebliche Schwierigkeiten erwarten lassen. Denkt man an die *Galois*sche Theorie der algebraischen Gleichungen, mit der in der vorliegenden Fragestellung vielleicht gewisse Berührungspunkte bestehen, so scheint es denkbar, daß zur Gewinnung einer einigermaßen übersichtlichen Theorie die Voraussetzung des dauernden Nichtverschwindens der Diskriminante vielleicht ganz sachgemäß sein könnte, zumal dann auch die reellen Lösungen in gewisser Weise bevorzugt werden, die uns ja vom Standpunkte der Anwendungen aus in besonderem Masse interessieren.

Jedenfalls scheint mir hier ein Gebiet vorzuliegen, bei dem sich analytische und algebraische Gesichtspunkte in interessanter und reizvoller Weise miteinander verbinden, und dessen weitere Bearbeitung nicht nur theoretisch wichtig, sondern unter Umständen auch für die Anwendungen bedeutungsvoll sein dürfte, insofern als damit ein neues mathematisches Instrument zur Behandlung der immer wichtiger werdenden nichtlinearen Probleme der Anwendungen bereitgestellt wird.

Nicht schließen aber möchte ich meine Ausführungen, die mit *Gauß* begannen, ohne eines weiteren großen Braunschweiger Mathematikers zu gedenken, der ganz im stillen auch heute noch eine bedeutsame Rolle bei der Entwicklung unserer Wissenschaft spielt, ich meine *Richard Dedekind*. Seine

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046998

Digitale Bibliothek Braunschweig

Forschungen galten der Arithmetik, also der Zahlentheorie, liegen also scheinbar dem hier behandelten Gebiet der algebraischen Integralgleichungen völlig fern. Und doch ist eine Verbindung vorhanden; denn die von ihm geschaffene Begriffsbildung des **Ideals** von ganzen algebraischen Zahlen ist, wie das überhaupt der Natur seiner Forschungen entsprach, so allgemein und so frei, daß sie sich ohne weiteres nicht nur auf Polynomideale, sondern auch auf Ideale von Integralpolynomen übertragen läßt. Eine solche rein algebraische Theorie wäre, nachdem über die Nullstellen der Integralpolynome, d. h. über die Lösungen der zugehörigen Integralgleichungen, einige Klarheit geschaffen sein wird, das nächste Ziel, sowie ja auch im Falle der gewöhnlichen Polynome das erste die Nullstellentheorie, d. h. der Fundamentalsatz der Algebra war, das nächste aber die von *E. Noether* im Anschluß an *Dedekinds* Begriffsbildungen geschaffene Zerlegungstheorie der Polynomideale. Mit diesem Hinweis, der vorläufig den Charakter von Zukunftsmusik hat, lassen Sie mich schließen.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046998